

MATEMATIKA 2

Lekcija 3- Metode izračunavanja određenog integrala

Pri izračunavanju određenog integrala koristi se neodređeni integral, tako da se i smena kao i parcijalno integraljenje mogu primeniti na neodređeni integral pa se posle mogu samo zameniti granice.

Metoda smene. O smeni promenljive u određenom integralu navodimo sledeću teoremu.

Teorema 1. Ako je $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje segmenta $[\alpha, \beta]$ na segment $[a, b]$, takvo da je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$ (ili $\varphi(\alpha) = b$ i $\varphi(\beta) = a$), onda je za svaku neprekidnu funkciju f na $[a, b]$, funkcija $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ neprekidna na $[\alpha, \beta]$ i važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \left(\int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \right)$$

Dokaz. Neka je $g(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$, $x \in [a, b]$. Za složenu funkciju $(g \circ \varphi)(t) = g(\varphi(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, imamo

$$(g \circ \varphi)'(t) = (g(\varphi(t)))' = g'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Dakle, za $\alpha \leq t \leq \beta$, funkcija $g(\varphi(t))$ je primitivna funkcija za $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, te je, prema Njutn-Lajbnicovoj formuli,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = g(\varphi(\beta)) - g(\varphi(\alpha)) = g(b) - g(a).$$

S druge strane, iz $g'(x) = f(x)$ sledi

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a).$$

Parcijalno integraljenje.

Teorema 2. Ako su $u(x)$ i $v(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije na $[a, b]$, tada važi formula parcijalnog integraljenja:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx,$$

ili, skraćeno zapisana,

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du. \quad (1)$$

Dokaz. Za proizvod $u(x)v(x)$ važi jednakost

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Prema Njutn-Lajbnicovoj formuli je

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = [(u(x)v(x))]|_a^b,$$

odnosno,

$$\int_a^b v(x) du(x) + \int_a^b u(x) dv(x) = [(u(x)v(x))]|_a^b,$$

odakle sledi formula (1).

Nesvojstveni integrali

Integrali na neograničenim intervalima. U definiciji određenog (Rimanovog) integrala, interval integraljenja je ograničen. Međutim, neke primene integralnog računa koriste integraljenje funkcija definisanih na neograničenim domenima. Takvi su beskonačni poluintervali oblika $[a, +\infty)$ i $(-\infty, b]$ ili beskonačni interval oblika $(-\infty, +\infty)$. (Na primer, takve integrale susrećemo prilikom računanja potencijala gravitacione ili elektrostatičke sile).

Da bismo pojam određenog integrala učinili primenljivim na neograničen interval integraljenja moramo uvesti nove definicije kojima se objašnjavaju značenja simbola

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^b f(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Neka je funkcija $f(x)$ definisana za $x \geq a$ i integrabilna, recimo neprekidna, na svakom konačnom zatvorenom intervalu $[a, b]$. Neka je $\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx$

za $b \geq a$. Ako funkcija $\Phi(b)$ ima graničnu vrednost L kad $b \rightarrow +\infty$, onda se kaže da nesvojstveni integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ konvergira. U tom slučaju se piše

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = L.$$

Pretpostavimo da funkcija $\Phi(b)$ nema graničnu vrednost kad $b \rightarrow +\infty$. Tada se kaže da nesvojstveni integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ divergira i njemu se ne dodeljuje nikakva vrednost.

Ako je, dodatno, neprekidna funkcija $f(x)$ i nenegativna na intervalu $[a, +\infty)$, tada je za fiksirano $b > a$ integral $\int_a^b f(x) dx$ površina između krive i intervala $[a, b]$ na x -osi, ograničena ordinatama u tačkama a i b . Prelaskom na graničnu vrednost kada $b \rightarrow +\infty$, zaključujemo da nesvojstveni integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ predstavlja površinu dela ravni ograničene intervalom $[a, +\infty)$ na x -osi, ordinatom u tački a i grafikom funkcije $y = f(x)$ nad $[a, +\infty)$.

Analogno se za funkciju definisanu na $(-\infty, b]$ uvodi nesvojstveni integral na tom intervalu:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Konačno, po definiciji je, za funkciju $f(x)$ definisanu na \mathbb{R} ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

pri čemu je a neki realni broj.

Može se pokazati da ovako definisan nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ ne zavisi od broja $a \in \mathbb{R}$. Nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ konvergira, po definiciji, ako oba nesvojstvena integrala na desnoj strani konvergiraju.

Primer. Neka su q_1 i q_2 dva pozitivna naelektrisanja (dakle uzajamno se odbijaju). Prema Kulonovom zakonu apsolutna vrednost elektrostatičke

sile interakcije F između dva tačkasta naelektrisanja u vakuumu data je sa

$$F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

gde je r rastojanje između naelektrisanih čestica a k je konstanta.

Pretpostavimo da je q_1 smešteno u tački M_0 koja je odabrana kao početak referentnog sistema, a q_2 u tački M . Uzmimo da r_1 označava rastojanje između tačaka M i M_0 i izračunajmo rad koji se dobija kretanjem naelektrisanja q_2 od M do beskonačnosti.

Traženi rad W je definisan kao nesvojstveni integral

$$W = \int_{r_1}^{+\infty} k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k q_1 q_2 \int_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

Po definiciji imamo

$$\int_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{r_1}^b \frac{dr}{r^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{r_1}.$$

Znači, $W = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r_1}$. Neka je q_2 jedinično naelektrisanje. Tada je $W = \frac{k q_1}{r_1}$. Ova veličina se zove potencijal polja indukovano naelektrisanjem q_1 .

Integrali neograničenih funkcija. Neophodan uslov da postoji određeni (Rimanov) integral $\int_a^b f(x) dx$ jeste da je funkcija $f(x)$ ograničena na $[a, b]$. Na primer, ako je $f(x)$ integrabilna na $[a, b_1]$, gde je $b_1 \in (a, b)$, i neograničena u okolini tačke $x = b$, onda određeni (Rimanov) integral funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ ne postoji. Kako postoji potreba za integralom funkcije f na intervalu $[a, b)$ i u ovakvoj situaciji, to se takav integral uvodi novom definicijom.

Neka je $f(x)$ integrabilna funkcija na $[a, b - \varepsilon]$ za svaki pozitivni broj ε manji od $b - a$ i neograničena na svakom intervalu oblika $[b - \varepsilon, b]$. Posmatrajmo funkciju $\Phi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$. Ako funkcija $\Phi(\varepsilon)$ ima graničnu vrednost

L kad $\varepsilon \rightarrow 0+$ onda se kaže da nesvojstveni integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergira i piše se

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = L.$$

Ako funkcija $\Phi(\varepsilon)$ nema graničnu vrednost kad $\varepsilon \rightarrow 0+$ kaže se da nesvojstveni integral $\int_a^b f(x) dx$ divergira. U tom slučaju se nesvojstvenom integralu ne dodeljuje numerička vrednost.

Analogno, ako je funkcija $f(x)$ neograničena na svakom intervalu oblika $(a, a + \varepsilon)$, gde je $\varepsilon \in (0, b - a)$, onda se nesvojstveni integral $\int_a^b f(x) dx$ definiše kao

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Za ovaj integral se kaže da konvergira ako granična vrednost na desnoj strani postoji. Inače je divergentan.

I konačno, ako je funkcija $f(x)$ neograničena u okolini tačke c , gde je $a < c < b$, onda se nesvojstveni integral $\int_a^b f(x) dx$ definiše sa

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Integrali na neograničenim intervalima zovu se još i nesvojstveni integrali prve vrste, a integrali neograničenih funkcija nesvojstveni integrali druge vrste.

Dva kriterijuma konvergenije nesvojstvenog integrala. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ i neka je neograničena u okolini tačke b .

I. Pretpostavimo, dodatno, da postoji neprekidna funkcija $\varphi(x)$ sa osobinom

$$|f(x)| \leq \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

Tada važi: ako integral $\int_a^b \varphi(x) dx$ konvergira, onda konvergira i integral $\int_a^b f(x) dx$, kao i integral $\int_a^b |f(x)| dx$. Ako integral $\int_a^b \varphi(x) dx$ divergira, onda divergira i integral $\int_a^b f(x) dx$.

II. Pretpostavimo, dodatno, da postoji neprekidna i pozitivna funkcija $g(x)$ na $[a, b]$ sa osobinom da za neko $K \neq 0$ važi

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Tada pišemo $f(x) \sim K \cdot g(x)$, $x \rightarrow b-$, i kažemo da se $f(x)$ ponaša kao $g(x)$ kada $x \rightarrow b-$. Tada važi:

ako integral $\int_a^b g(x) dx$ konvergira, onda konvergira i integral $\int_a^b f(x) dx$;
 ako integral $\int_a^b g(x) dx$ divergira, onda divergira i integral $\int_a^b f(x) dx$.

Razumljivo, postoje i analogni kriterijumi za konvergenciju nesvojstvenih integrala $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, samo što se u slučaju **II.** koristi ponašanje funkcije kada $x \rightarrow +\infty$. Preporučujemo studentu da ih sam formuliše.

Primeri.

Ispitati konvergenciju integrala:

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad 2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

(Rad na vežbama.)

Napomena. Svaki od navedenih nesvojstvenih integrala izračunava se po formuli $F(b) - F(a)$ gde je $F(x)$ bilo koja primitivna funkcija podintegralne funkcije $f(x)$ i $F(b) = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$, $b = +\infty$ ili $b \in \mathbb{R}$, u zavisnosti od toga da li se radi o nesvojstvenom integralu prve ili druge vrste.